Υποδείξεις Τεστ 6, Απειροστικος Λογισμός 2

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

(i) Η συνάρτηση

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt,\ x \geq 0$$

είναι αύξουσα, επειδή $F'(x) = f(x) \geq 0,\ x \geq 0$. Αυτό μας δίνει άμεσα το ζητούμενο.

(ii) Αρχικά, από ισοσυγκλίνουσες συναρτήσεις αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\int_0^x p(t)dt} = 0.$$

Τώρα, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} |G(x)| = 0$. Για κάθε $x \geq 0$, έχουμε

$$0 \leq |G(x)| \leq e^{-\int_0^x p(t)dt} \int_0^x |q(s)| e^{\int_0^s p(t)dt} ds \quad (\star)$$

Η συνάρτηση $F(x) := \displaystyle\int_0^x |q(s)| e^{\int_0^s p(t)dt} ds$ είναι παραγωγίσιμη στο σε κάθε $x \in [0, +\infty)$ με παράγωγο $F'(x) = |q(x)| e^{\int_0^x p(t)dt},\ x \geq 0$ και άρα, από το ζήτημα (i) η F έχει όριο είτε πεπερασμένο, είτε $+\infty$. Εξετάζουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

• Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \in \mathbb{R}$, τότε από την $(\star)$ έπεται $\lim\limits_{x\to+\infty} |G(x)| = 0$

• Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$, τότε με χρήση του κανόνα L' Hospital από την $(\star)$ έπεται $\lim\limits_{x\to+\infty} |G(x)| = 0$.

Θέμα 2

(i) (Τύπου Ι) Επειδή $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha|x|}\ dx = \frac{1}{\alpha}$ και η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι άρτια το ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο και ίσο με $\dfrac{2}{a}$.

(ii) (Τύπου Ι) Γράφουμε $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ και αναλύουμε τη συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων. Έτσι, με ευθύ υπολογισμό έχουμε

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \cdots = \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}.$$

(iii) (Τύπου ΙΙ) Με ευθύ υπολογισμό

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} := \lim_{t\to0^+} \int_t^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \cdots = -4.$$

(iv) (Μεικτού Τύπου) Είναι

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p} := \int_0^1 \frac{dx}{x^p} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \quad (\star)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \begin{cases} < +\infty & , \quad p > 1 \\ = +\infty & , \quad p \leq 1 \end{cases}$$

Επίσης, με ευθύ υπολογισμό, αν $p = 1$, έχουμε $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t \to 0} \int_0^t \frac{dx}{x} = +\infty$ και αν $p \neq 1$, έχουμε

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{t^{1-p}}{1-p} \right) \begin{cases} = +\infty & , \quad p > 1 \\ < +\infty & , \quad p < 1 \end{cases}$$

Άρα, στην $(\star)$ το γενικευμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει στο $+\infty$.

Θέμα 3

(i) Θέτουμε $g(x) = |f(x)| - f(x),\ x \geq a$. Τότε, $0 \leq g(x) \leq 2|f(x)|,\ x \geq a$. Οπότε, από το Κριτήριο Σύγκρισης το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\ dx \leq +\infty$. Επειδή $f(x) = |f(x)| - g(x),\ x \geq a$ έχουμε

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \int_a^{+\infty} |f(x)|\ dx - \int_a^{+\infty} g(x)\ dx < +\infty.$$

(ii) (a) Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι Τύπου Ι συγκλίνει (με χρήση του ζητήματος (i) και του Κριτηρίου Σύγκρισης), ενώ το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι Μεικτού Τύπου και αρκεί να εξετάστεί ως προς στη σύγκλιση το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2}\ dx$ (Τύπου ΙΙ). Με την αντικατάσταση $x = \dfrac{1}{t}$ αυτό μετασχηματίζεται στο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin^2\left(\frac{1}{t}\right)\ dt$ (Τύπου Ι) για το οποίο, επειδή

$$\left(\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2 \leq \frac{1}{t^2},\ \forall\ t \geq 1$$

από το Κριτήριο Σύγκρισης αυτό συγκλίνει

(b) Η $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3^x},\ x \geq 1$ είναι θετική, συνεχής και φθίνουσα. Οπότε, από το Κριτήριο Σειράς-Ολοκληρώματος αρκεί να δείξουμε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n}$ συγκλίνει. Πράγματι, από το Κριτήριο Λόγου, η σειρά συγκλίνει.

(c) Πρόκειται για ολοκλήρωμα Τύπου ΙΙ. Θα το μετασχηματίσουμε σε ολοκλήρωμα Τύπου Ι. Θέτουμε $x - a = \dfrac{1}{t}$ και συνεπώς το ολοκλήρωμα ανάγεται στο εξής ισοδύναμό του

$$\int_a^{\beta} \frac{dx}{(x-a)^p} = \int_{\frac{1}{\beta - a}}^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-p}},$$

το οποίο συγκλίνει, γιατί $p < 1$.